Examen del 8 de mayo de 2018

Cálculo vectorial.

Los momentos generados por un sistema de vectores deslizantes en los puntos $A(,0,0,0)$, $B(1,2,1)$ y $C(3,4,0)$ son $\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j} + 5 \cdot \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{M_B} = 2 \cdot \boldsymbol{i} + 4 \cdot \boldsymbol{j} + a \cdot \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{M_C} = b \cdot \boldsymbol{i} + 9 \cdot \boldsymbol{j} + c \cdot \boldsymbol{k}$, respectivamente. Determinar

1. Los valores de a, b y c.
   Los momentos generados por un sistema de vectores deslizantes en los puntos $A(,0,0,0)$, $B(1,2,1)$ y $C(3,4,0)$ han de verificar que

$$\boldsymbol{M_A} \cdot \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{M_B} \cdot \boldsymbol{AB}$$
$$\boldsymbol{M_A} \cdot \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{M_C} \cdot \boldsymbol{AC}$$
$$\boldsymbol{M_B} \cdot \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{M_C} \cdot \boldsymbol{BC}$$

   es decir,

$$(\boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j} + 5 \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = (2 \cdot \boldsymbol{i} + 4 \cdot \boldsymbol{j} + a \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$
$$(\boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j} + 5 \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (3 \cdot \boldsymbol{i} + 4 \cdot \boldsymbol{j}) = (b \cdot \boldsymbol{i} + 9 \cdot \boldsymbol{j} + c \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (3 \cdot \boldsymbol{i} + 4 \cdot \boldsymbol{j})$$
$$(2 \cdot \boldsymbol{i} + 4 \cdot \boldsymbol{j} + a \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (2 \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) = (b \cdot \boldsymbol{i} + 9 \cdot \boldsymbol{j} + c \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (2 \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$$

   de donde resulta que

$$\boldsymbol{M_B} = 2 \cdot \boldsymbol{i} + 4 \cdot \boldsymbol{j} + 2 \cdot \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{M_C} = -7 \cdot \boldsymbol{i} + 9 \cdot \boldsymbol{j} - 6 \cdot \boldsymbol{k}$$

2. La resultante general del sistema.
   Teniendo en cuenta las ecuaciones del campo de momentos.

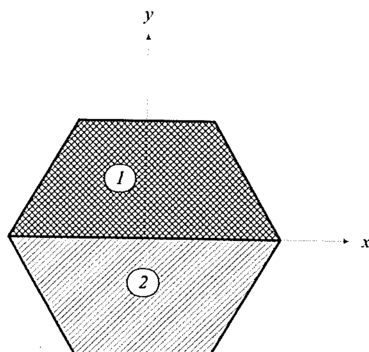
$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{M_B} + \boldsymbol{AB} \wedge \boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{M_C} + \boldsymbol{BC} \wedge \boldsymbol{R}$$

   se obtiene que

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i} + 5 \cdot \boldsymbol{j} + 2 \cdot \boldsymbol{k}$$

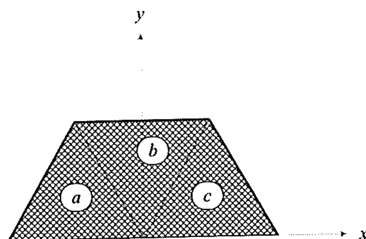
Geometría de Masas.

Un hexágono regular de lado a está formado por dos placas de distinto material y de forma indicada en la figura. Determinar la relación entre las densidades superficiales ρ_1 y ρ_2 para que la posición del centro de gravedad del conjunto esté en $(0, a \cdot \sqrt{3}/6)$.



© 2018 Tecnun (University of Navarra)

Por simetría el cdg de cada una de las dos placas estará sobre el eje y y a la misma distancia del origen. Se va a estudiar el centro de masas de la placa superior



Se puede dividir en tres triángulos equiláteros de lado a, como se muestra en la figura. La coordenada y de los centros de gravedad de los triángulos es

$$y_a = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$
$$y_b = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$
$$y_c = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$

Por consiguiente, en la placa 1

$$y_1 = \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9}$$

de igual manera, en la placa 2

$$y_2 = -\frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9}$$

Por consiguiente

$$(\rho_1 + \rho_2) \cdot y_G = \rho_1 \cdot y_1 + \rho_2 \cdot y_2$$

es decir,

$$(\rho_1 + \rho_2) \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} = \rho_1 \cdot \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9} - \rho_2 \cdot \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9}$$

de donde resulta que

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{7}$$

Estática.

El sistema de la figura está en un plano vertical y consta de dos barras de longitud L y peso $P = M \cdot g$ cada una de ellas; un disco de radio $L/2$ y peso $P = M \cdot g$, un resorte que une una guía horizontal con el centro del disco; una cuerda, atada a la articulación A, que está manteniendo un peso E de valor $Q = 2 \cdot M \cdot g$, apoyándose en el perímetro del disco. No hay rozamiento.

www.tecnun.es

© 2018 Tecnun (University of Navarra)